HALLGATÓI DÖNTÉSEK RACIONALITÁSÁNAK VIZSGÁLATA PÁROSÍTÁSELMÉLETI ESZKÖZÖKKEL

THE EXAMINATION OF THE RATIONALITY OF STUDENTS' DECISIONS WITH THE HELP OF MATCHING THEORY

SZIKORA PÉTER tanársegéd
Óbudai Egyetem, Keleti Gazdasági Kar, Szervezési és Vezetési Intézet

ABSTRACT

Game, and especially matching theory is one of the most important approaches of mathematics and economics of the 21. century. Numerous everyday problems can be algorithmed with the help of them. The aim of present paper is to introduce the outcome of various matching algorithms in the life of students in tertiary education. A short insight into the algorithms, and the possibilities of improvement of: course election, application for international exchange and signing up for various time slots for student assignments are presented. By pinpointing the sub-optimality of the present systems and providing alternative solutions for the problems investigated I try to support students of tertiary education in making rational, optimal, or at least satisfying decisions.

1. Bevezetés

A párosítás elméleti kutatások a 20. század második felében lettek egyre inkább ismertek. Régóta igényünk, hogy képesek legyünk különböző halmazokat egymással párosítani, gondoljunk az olyan matematikai problémákra, mint a különböző lineáris programozási feladatok, például szállítási vagy hozzárendelési feladatok. Ezeknek a hátránya, hogy az optimalizálás célja az esetekben mindössze az összhasznosság növelése. A párosítás elméleteknél az elsődleges szempont nem ez, hanem a résztvevők egyéni hasznosságának a maximalizálása. Az első párosításelméleti cikk Shapley és Gale (1962) nevéhez fűződik, ahol házassági kapcsolatok létrejöttén mutatták be a problémát és adtak rá megoldást. Egy egyszerű algoritmus segítségével szemléltették, hogy miként található meg stabil párosítás a férfiak és nők halmazai között, ha mindkét nemnek léteznek preferenciái. Lényeges, hogy nem csak létrehoztak, hanem olyan párokat alkottak meg, amelyek stabilnak mondhatóak, mivel nincsen olyan blokkoló pár, ahol mindkét fél jobban járna, ha egymással kötne házasságot elhagyva az előző párját. Ennek is köszönhetően a párosítások irodalma sikeres karriert futott be. Párosítási elméleteket alkalmaznak jelenleg is az orvos rezidensek elhelyezésénél (Roth, 1984; Gale és Shapley, 1962), vagy a felsőoktatási felvételik során (Abdulkadiroğlu– Sönmez (2003), Abdulkadiroğlu és szerzőtársai (2008), Ergin–Sönmez (2006), Roth (1984), Roth–Peranson (1999), Biró (2006), Biró (2008), Biró és szerzőtársai (2009), Kóczy (2009), Kóczy (2010)). Jelen tanulmánynak a célja annak bemutatása, hogy az egyetemi élet folyamán is létezik rengeteg olyan probléma, amelyek megoldásához a párosítás elméleti algoritmusok használata hatékony lenne.

2. Párosítás elméleti problémák

A párosítás elméletek lényege, hogy két diszjunkt halmazban szereplő elemeket az általuk meghatározott preferencia sorrendnek megfelelően párosítunk egymással. Az első ilyen párosításelméleti probléma, amire Gale és Shapley (1962) egy természetes algoritmust határozott meg, a házassági kapcsolatok probléma. Amennyiben a csúcsok halmaza szétosztható két részre (például férfiak, nők), hogy az élek csak a két halmaz között vannak, akkor a gráf páros. Léteznek olyan párosítási feladatok, ahol nem kell megkülönböztetni a két külön csoportot. Ilyen a szobatárs probléma, ahol mindenkit mindenkivel lehet párosítani. A fejezet további részeiben ezeket a modelleket mutatom be.

2.1. Házassági probléma

Létezik két, egymással semmilyen szinten nem keveredő halmaz, nevezzük őket F-nek és N-nek. F jelölje a férfiak, N a nők halmazát. Az elemeket a halmazokban jelezzük f és n karakterekkel. Akkor elmondhatjuk, hogy $F \cap N = \emptyset$ és $F=\{f_1,f_2,\dots f_m\}$, illetve $N=\{n_1,n_2,\dots n_p\}$, ha a férfiakból m, míg a nőkből p darab van. Meg kell még határozni a férfiak és a nők preferencia sorrendjét is. A férfiak sorrendje $P(f_1)=n_1,n_3,n_2\dots$, míg a nőké $P(n_1)=f_3,f_1,f_2\dots$.Ezáltal a párosítás lehetőségeit a (F,N,P) hármassal lehet leírni. Akkor lesz házasságkötés egy adott férfi és nő között, ha egymás preferencia listáján szerepelnek. Az algoritmus lényege, hogy valamelyik fél oldaláról futtatva az adott preferencia alapján a számára legmegfelelőbbet választja. Ha a másik féltől nem kap visszautasítást (mert még nem volt párja, vagy preferencia sorrendje alapján jobbnak érzékeli), akkor az adott játékosnak van egy ideiglenes párja. Minden körben, akiket elutasítottak, azok a preferencia sorrendjükben lévő következő félt keresik meg. Utolsó lépésben az ideiglenes párok véglegessé válnak. Ez így kialakult párosítás stabil. Párosítás, hiszen minden férfi csak egy nőnek udvarolt, és minden nő csak egy férfit tartott meg magának. A stabilitás igazolásához vegyünk egy férfi-nő párt, akik nem egymás házastársai az algoritmus végén. Ennek két oka lehet: vagy udvarolt a férfi a nőnek, de az visszautasította, vagy nem is udvarolt neki. Ha a férfit a nő visszautasította valamikor az algoritmus során, akkor abban a pillanatban volt egy jobb udvarlója a nőnek, de mivel a nő csak egyre jobb és jobb ajánlatot kapott, ezért a legvégén is kedvezőbb kérője (férje) lesz annál. Ha viszont a férfi nem is tett ajánlatot a nőnek, akkor az csak azért lehetett, mert mindvégig neki jobban tetsző lányoknak udvarolt, így a folyamat végéig is olyan feleséget kap, akit jobban kedvel annál a nőnél.

2.2. Egyéb párosítás elméleti problémák

Iskolai felvételi eljárás

Az egyetemi felvételi eljárás abban különbözik házassági problémától, hogy ha az egyetemeket a férfiak halmazával azonosítjuk, akkor a férfiak nem csak egy feleséget keresnek, hanem többet is. Tehát egy adott szakra több hallgató is bekerülhet, sőt, általában a szak egy minimális létszám alatt el sem indul. Problémás a hallgatók rangsorolása, mert a felvételi rendszer megenged azonos pontszámot is. Ebben az esetben, ha több hallgató van azonos pontszámmal az adott rangsorban, mint amennyi az egyetem kapacitása, akkor egyikük sem kerül be az adott szakra, így a hallgató és az egyetem sem lesz elégedett. A sok az egyhez párosítások mind visszavezethetők az egy az egyes megoldásokra, ebben az esetben az egyetemi szakokat kisebb egységekből (egy hallgatót tartalmazó) álló részekre bontjuk.

Gyakornok elhelyezési probléma

Ez a probléma igazából megegyezik az iskolai felvételi problémával. Roth (1984) bemutatta, hogy az amerikai orvosi rezidensek elhelyezkedését támogató program Gale és Shapley (1962) által később publikált algoritmust használja. Eredetileg a kórházak irányából futtatták az algoritmust, ezt mára megfordították, így a jelentkezők szempontjából hatékonyabb eredményt lehet kapni, bár Roth és Peranson (1999) elemzése szerint ez a különbség nagyon kicsi.

3. Egyetemi problémák

Kutatásomban három olyan érdekes problémát vizsgáltam meg, ahol jelenleg nem használunk semmilyen párosítás elméleti algoritmust, pedig véleményem szerint lenne rá lehetőség, amellyel a hallgatók részéről egy sokkal optimálisabb párosítást kaphatnánk.

a). Órai feladatok hallgatókkal való párosításának problémája,

b). Kurzus/vizsga választás problémája, (Szikora, 2014, Enterprise and the Competitive Environment 2014 conference, Brno).

c). Erasmusra való jelentkezés problémája (Szikora, 2013).

A három probléma közül kettőben (A, B) mind a mai napig olyan megoldást alkalmazunk, hogy aki először tud jelentkezni az adott feladatra, az kapja meg. Ez leginkább az előző alfejezetben említett mohó algoritmusnak felel meg. A C jelű probléma közelebb esik egy jobb párosítási megoldáshoz, mivel ott megjelennek már hallgatói, ily módon fogadóoldali preferenciák is. A tanulmányban ezen problémák közül az A jelű problémát mutatom be részletesen.

3.1. Kutatás célja

A tanulmány annak a feltevésnek az igazolása, hogy a párosítás elmélet algoritmusai alkalmazhatók az egyetemen különféle feladatok szétosztásánál, és hatékonyabbak, mint ha a hallgatók egymás után jelentkeznek a még szabad feladatokra. Ennek bizonyítására meghatároztam különböző értékelési mutatókat.

Az egyik mutató a jelentkezők szempontjából méri a párosítás hatékonyságát ($U=(\Sigma P(i,k)*n)/n'$), hogy a jelentkezők közül hányan és milyen helyre kerülnek be a választott helyekre. n=jelentkező száma, p(i)=i. jelentkező preferencia sorrendje, n'= bekerült jelentkezők száma, p(i,k)=i. jelentkező által meghatározott, az k feladathoz (ahova bekerült a jelentkező) rendelt preferencia sorrend indexe.

A másik mutató a feladatok szempontjából méri a párosítás hatékonyságát ($R=\Sigma(f(p(i,k)))$), hogy a jelentkezők által meghatározott pontszámokból mennyi kerül be a választott helyre. n=jelentkező száma, p(i)=i. jelentkező preferencia sorrendje, n'= bekerült jelentkezők száma, f(p(i,k))=i. jelentkező által meghatározott, az k feladathoz (ahova bekerült a jelentkező) rendelt preferencia érték.

3.2. Alkalmazható algoritmusok

Ebben a fejezetben néhány ismertebb algoritmust ismertetek, amelyek használata hatékonyabb megoldást adhat a felmerülő problémákra.

Greedy (mohó) algoritmus

- Nézzük végig az összes jelentkezőt
- Ha van a listáján olyan fogadóhely, ami megfelel neki, akkor a neki legjobb helyhez párosítsuk, különben marad párosítás nélkül

Gale-Shapley algoritmus

- A hallgatók a saját preferencia listájuk első helyén lévő egyetemre pályáznak.
- Az egyetemek, ha kvótájuknál több pályázójuk van, akkor a legjobbak kivételével mindenkit visszautasítanak, aki kívül esik a kvótán,
- A hallgatók a listájukon lévő következő egyetemre pályáznak, és újra a második lépés
- Addig megy, amíg minden hallgató nem talál magának egyetemet, vagy ki nem fogy a listájuk.

Boston mechanizmus

- A jelentkezők és az iskolák kialakítják a preferenciáikat. „Utóbbiak előnyben részesítik a diákok testvéreit, ezután a gyalogtávolságon belül lakókat és mindenekelőtt azokat, akikre mindkettő igaz. Ezen belül a sorrendet sorsolással határozzák meg."
- Első körben csak az első helyen megjelölt iskolát veszik figyelembe. Minden iskola a hozzá jelentkezők között az így meghatározott preferenciák alapján, illetve a kapacitás függvényében osztja ki a helyeket.

- A megmaradt hallgatókat a második helyen megjelölt iskolába próbálják elhelyezni. És így tovább, egészen addig, amíg el nem fogynak a hallgatók.

3.3. Órai feladatra való jelentkezés problémája

Minden félévben előfordul, hogy a hallgatók kapnak, választhatnak valamilyen feladatot, amelyet beleszámítunk a féléves eredménybe. Ilyen lehet például kiselőadás tartása egy adott témából, vagy valamilyen órai feladat elvégzése, beadandó választás, és számos egyéb feladat. Ezek kiosztása általában kétféle módon történik: vagy az oktató önhatalmúlag kiosztja őket, vagy a hallgatók választanak, ez pedig gyakorlatilag egy mohó algoritmusnak felel meg, ahol mindenki csak abból választ, ami megmaradt számára a többiek után. Aki az elején tud választani, annak több lehetősége van, aki a végén, annak kevesebb. Az Óbudai Egyetemen az aktuális félévben egy adott tárgyból 2 kurzuson is oktatok. A hallgatók száma mindkét kurzuson 20-20 fő. A félév folyamán minden hallgatónak kell csinálnia egy feladatot, amit az egyik órán be kell mutatnia. Mivel a félévben nagyjából 10 olyan hét van, ahol a hallgatók prezentálhatnak, így minden héten 2-2 hallgató adhat elő. A félév első óráján van a hallgatóknak lehetőségük jelentkezni a féléves feladatokra. Különböző módszerek segítségével jelentkezhetnek. Az alap módszer esetén minden hallgató kimegy a táblához, érkezési sorrendben, és valamelyik héthez felírhatja a nevét, ahol még van üres hely. Ebben az esetben a hallgatók egymás után választhatnak a szabad hetek között, így aki a végére marad, annak már nincs lehetősége választani. Ezért is találtam ki egy másik módszert. Minden hallgató értékelheti a heteket, preferencia sorrend megadásával, úgy, hogy még súlyoznia is lehet őket. A súlyokat úgy kell elosztaniuk a hetek között, hogy az összegük maximálisan 100 lehet. Így van lehetőség a különböző párosításelméleti algoritmusok futtatására. A hallgatók nem ismerik előre a párosítás elméleti módszereket, főleg, hogy minden módszer esetén más és más stratégiát lenne érdemes alkalmazni. Mindössze annyit tudnak, hogy érdemes minél több helyet megadni, mert aki nem kerül be egyik hétre sem, az nem tudja majd teljesíteni azt a feladatot. A hallgatói preferencia sorrend az első táblázatban látható (S1-20 jelöli a hallgatókat, C0-9 a feladatokat)

1. táblázat Hallgató preferencia sorrend, ha minden feladatot sorba rendezhetnek

Table 1: Preference order of students when each assignment is ranked

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S1	C4	C7	C8	C6						
S2	C6	C7	C2	C8	C5	C4				
S3	C9	C8	C7							
S4	C4	C9	C5	C8						
S5	C9	C5	C4							
S6	C1	C7	C3	C5						
S7	C7	C4								
S8	C7	C8								
S9	C5	C3	C0							
S10	C7	C9	C6							
S11	C6	C5	C3	C8						
S12	C4	C1	C3	C2	C8	C6				
S13	C8	C2	C1	C0						
S14	C5	C4	C7	C8	C6	C1	C3	C2		
S15	C2	C5	C6	C8	C4	C1	C0	C3		
S16	C7	C3	C2							
S17	C1	C7	C8	C9	C6	C4	C2	C3	C0	
S18	C6	C7	C8	C9						
S19	C9	C3								
S20	C8	C6	C7	C5	C9	C4	C1	C2	C3	C0

Forrás: saját kutatás alapján

A 2. táblázatban látható a hallgatók táblás jelentkezése. Zárójelben az az érték látható, hogy végül a saját preferencia sorrendje alapján hányadik helyre kerül be. Akinél a zárójelben nem látható szám, ő olyan hetet választott, vagy választhatott a táblánál, ami a saját preferenciái között nem szerepelt. Az alap táblás jelentkezésnél ez az összeg R=345 egység. Látható, hogy a legtöbb hallgató olyan feladatot kapott csak, amit sokadik helyen választott, vagy nem választott, így ez a módszer nagyon messze van az optimálistól. Az U értéke 45*20/15=60.

2. táblázat hallgatók által a táblánál való feladatválasztás (R=345, U=60)

Table 2: Students' decisions as made on the whiteboard (R=345, U=60)

C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
S9 (3)	S17 (1)	S16 (3)	S6 (3)	S12 (1)	S1 (-)	S8 (3)	S2 (2)	S7 (-)	S3 (1)
S20 (10)	S18 (-)	S19 (-)	S15 (8)	S14 (2)	S5 (2)	S10 (3)	S11 (-)	S13 (1)	S4 (2)

Forrás: saját kutatás alapján

Miután megkaptam a preferenciákat, a megadott súlyok segítségével a hallgatókat sorba rendeztem az adott hetekhez. Így már volt lehetőségem a különböző algoritmusokat lefuttatni. A Gale-Shapley algoritmus futásának eredménye a 3. táblázatban és az 1. ábrán látható.

3. táblázat párosítás Gale-Shapley algoritmussal (R=934, U=31,11)

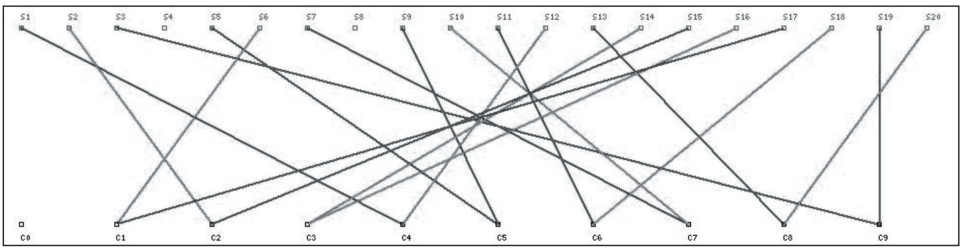
Table 3: Matching with the help of the Gale-Shapley algorithm (R=934, U=31.11)

C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
	S6 (1)	S2 (3)	S14 (7)	S1 (1)	S5 (2)	S11 (1)	S7 (1)	S13 (1)	S3 (1)
	S17 (1)	S15 (1)	S16 (2)	S12 (1)	S9 (1)	S18 (1)	S10 (1)	S20 (1)	S19 (1)

Forrás: saját kutatás alapján

1. ábra Párosítás Gale-Shapley algoritmus segítségével (R=934, U=31,11)

Graph 1: Matching with the halp of the Gale-Shapley algorithm (R=934, U=31.11)

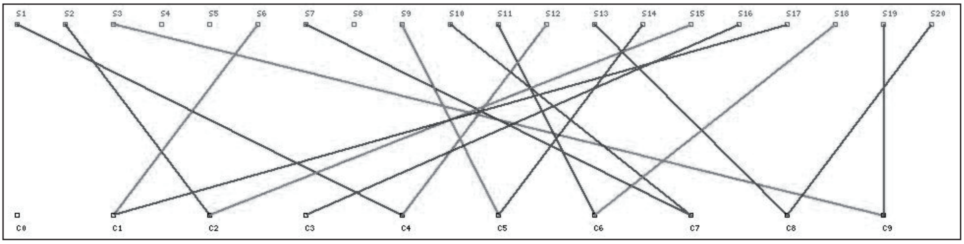


Forrás: saját kutatás alapján

Hasonló eredményt kapunk akkor is, ha a Bostoni módszert alkalmazzuk, ennek eredménye látható a 4. táblázatban és a 2. ábrán.

2. ábra Párosítás Boston mechanizmussal (R=804, U=23,53)

Graph 2: Matching with the help of the Boston mechanism (R=804, U=23.53)



Forrás: saját kutatás alapján

4. táblázat Párosítás Boston mechanizmussal (R=804, U=23,53)

Table 4: Matching with the help of the Boston mechanism (R=804, U=23.53)

C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
	S6 (1)	S2 (3)	S16 (2)	S1 (1)	S9 (1)	S11 (1)	S7 (1)	S13 (1)	S3 (1)
	S17 (1)	S15 (1)		S12 (1)	S14 (1)	S18 (1)	S10 (1)	S20 (1)	S19 (1)

Forrás: saját kutatás alapján

Mint látható, akár az U, akár az R mutatót nézzük, látványosan jobb eredményt kapunk, ha a G-S vagy a Boston algoritmust alkalmazzuk, mintha a mostani algoritmus szerint párosítanánk.

3. Következtetések

Az egyetemi életben rengeteg olyan probléma fordulhat elő, ahol két egymástól különböző halmazt kell összepárosítani. Jelenleg ezekre legtöbbször még semmilyen algoritmust nem alkalmaznak, legtöbbször a szerencsén múlik, hogy például a vizsgára való jelentkezésnél a hallgató arra a vizsgára kerül-e be, amelyre szeretne. Tanulmányomban bemutattam egy ilyen problémát, részletesen elemezve és bizonyítva, hogy az ismertetett algoritmusok alkalmazása mind az egyetem, mind a hallgatók számára hasznos megoldást nyújtanának.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Abdulkadiroğlu, A.–Sönmez, T., 2003, School choice: A mechanism design approach. American Economic Review, 93. 729–747

Abdulkadiroğlu, A.,Che Y, Yasuda Y., 2008, Expanding „Choice" in School. Choice Economic Research initiatives at Duke

Bíró Péter, 2006, Stabil párosítási modellek és ezeken alapuló központi párosító programok. Szigma, 37. 153–175

Biró Péter, 2008, Student Admissions in Hungary as Gale and Shapley Envisaged. Technical Report TR-2008-291, University of Glasgow, Department of Computing Science, Glasgow.

Biró Péter–Fleiner Tamás–Irving, R.–Manlove, D., 2009, The College Admissions problem with lower and common quotas. DCS Technical Report TR-2009-303, University of Glasgow, Department of Computing Science, Glasgow.

http://www.felvi.hu/felsooktatasimuhely/Algoritmusok/a_magyarorszagi_felveteli_besorolo_algoritmusok_rovid_bemutatasa?itemNo=1.

Ergin, H.–Sönmez, T., 2006,: Games of school choice under the boston mechanism. Journal of Public Economics, 90. 215–237

Gale D., Shapley L. S. ,1962, College admissions and stability of marriage. American Mathematical Monthly 69:9 – 15

Irving, R. W.–Manlove, D. F., 2009, Finding large stable matchings. Journal of Experimental Algorithmics 14:1.2

Kóczy Á. László, 2009, Központi felvételi rendszerek. Taktikázás és stabilitás, Közgazdasági Szemle, LVI. évf., 422–442.

Kóczy Á. László, 2010, A magyarországi felvételi rendszerek sajátosságai Magyarországon, Közgazdasági Szemle, LVII. évf.,142–164.

Roth A. E., 1984, The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. Journal of Political Economy 6:991 – 1016

Roth A. E., Peranson E., 1999, The redesign of the matching market for American physicians: some engineering aspects of economic design. The American Economic Review 89:748 – 752

Szikora P., 2013, Hatékonyság-vesztés egy egyszerű centralizált párosítási mechanizmusban, Új kihívások a tudományban és az oktatásban, 367-378.